Examen Blanc N° 3 Pour Obtenir
Diplôme Du Baccalauréat 2021 Ville ZAIO

Matière	**Mathématiques**	Coeffici	9
Filière	**Science mathématiques (A) et (B)**	Durée	4

بسم الله الرحمن الرحيم

- La durée de l'épreuve est de **4 heures** ;
- l'épreuve comporte **(5) pages** numérotées de 1/5 à 5/5 ;
- l'épreuve est composée de **quatre exercices** indépendants entre eux ;
- le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.

L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

- **Exercice 1** qui concerne **Arithmétique**.......................... **04,00 points**
- **Exercice 2** qui concerne **les nombres complexes**.......... **04,00 points**
- **Exercice 3** qui concerne **Analyse** .... **06,25 points**
- **Exercice 4** qui concerne **Analyse** .... **05,75 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

Réalisés par : -Prof : Abdelali TAJJIOU
-Prof : Soufiane TAJJIOU

Exercice 1 : (4,00 points)

Partie I:

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $(E):17x-11y=2021$

0.50 **1.** Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x\equiv 5[11]$.

0.50 **2.** Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie II:

Soit p un entier naturel premier tel que $p\geq 3$, différent de 43 et 47.

On admet que : $2021=43\times 47$.

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$(E_p):17x^{p-1}-11y^{p-1}=2021$$

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (E_p).

0.75 **a.** Montrer que pour tout entier a, on a : $a^{p-1}\equiv 0[p]$ ou $a^{p-1}\equiv 1[p]$.

0.25 **b.** Vérifier que p et 2021 sont premiers entre eux.

0.50 **c.** En déduire que : $x\wedge p=1$ ou $y\wedge p=1$.

0.75 **d.** Montrer que : $17x^{p-1}-11y^{p-1}\equiv -11[p]$ ou $17x^{p-1}-11y^{p-1}\equiv 6[p]$

ou $17x^{p-1}-11y^{p-1}\equiv 17[p]$.

0.75 **2.** Déduire des questions précédentes que l'équation (E_{17}) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : (4,00 points)

Partie I:

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E):z^2-(1+5i)z-8+4i=0$$

0.25 **1.** Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.

0.50 **2.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Partie II:

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère : A, B, C et M les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=2+2i$, $z_C=-1+3i$ et $z_M=m$ où $m\in\mathbb{C}^*$.

0.50 **1. a.** Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que les points O, C et M soient alignés.

0.25 **b.** En déduire l'ensemble des points $M(m)$ tels que OCM soit un triangle rectangle en O.

0.50 **2.** Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

3. On considère la rotation R de centre A et d'angle $\pi/2$ et l'homothétie H de centre A et de rapport -2.

0.50 **a.** Déterminer l'écriture complexe des transformations R et H.

0.50 **b.** Montrer que l'écriture complexe de la transformation $T = R \circ H$ est

$$z' - i = -2i(z - i)$$

0.50 **c.** Soit C' l'image du point C par la transformation T.
Montrer que les points A, B et C' sont colinéaires.

0.50 **4.** Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points A, B, C et M soient cocycliques

Exercice 3 : (6,25 points)

Soit n un entier naturel.
on considère la fonction numérique g_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g_n(0) = n \text{ et } (\forall x > 0);\ g_n(x) = n - x\ln(x)$$

et soit (C_{g_n}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie I:

0.25 **1. a.** Montrer que la fonction g_n est continue à droite au point 0.

0.25 **b.** Étudier la dérivabilité de la fonction g_n à droite au point 0.

0.50 **c.** Calculer $g'_n(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$, puis étudier les variations de la fonction g_n.

0.25 **2.** Étudier la branche infinie en $+\infty$.

0.50 **3.** Tracer la courbe (C_{g_1}). (On prend : $\|\vec{i}\| = 1\ cm$).

0.75 **4.** Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_{g_1}) et l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = \dfrac{1}{e^2}$ et $x = 1$.

Partie II:

On pose : $f = g_0$, et soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$.

0.50 **1.** Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions x_n et y_n tels que : $0 < x_n < \dfrac{1}{e} < y_n < 1$.

0.25 **2. a.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente

0.50 **b.** Montrer que $(\forall n \geq 3);\ x_n < \dfrac{1}{n}$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

0.50 **3. a.** Montrer que $(\forall x > 2);\ 2\ln x \leq x$, puis déduire $(\forall n \geq 3);\ \dfrac{1}{n^2} \leq x_n$.

0.50 **b.** Montrer que : $(\forall n \geq 3);\ \ln(x_n) \geq -\ln n - \ln(2) - \ln(\ln n)$.

0.25 **c.** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{\ln n} = -1$.

0.50 **4. a.** Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 3}$ converge et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$.

0.50 **b.** Montrer que : $(\forall n \geq 3)(\exists c_n \in]y_n, 1[);\ \dfrac{y_n - 1}{\ln(y_n)} = c_n$.

0.25 **c.** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(y_n - 1) = -1$.

Exercice 4 : (5,75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(1) = -\ln 2 \text{ et } (\forall x > 1);\ F(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{\ln^2(t)}\, dt$$

et soit (C_F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \text{ et } (\forall x \in]1, +\infty[);\ h(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

0.25 **a.** Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

0.25 **b.** Vérifier que pour tout x de $]1, +\infty[$ on a : $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt = \ln 2$.

0.75 **c.** En utilisant la technique de l'intégration par partie, montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right);\ F(x)-F(1)=\frac{x(x-1)(x+2)}{2}h(x)-\int_x^{x^2}\frac{2t+1}{t}h(t)\ dt$$

0.50 **d.** Déduire que F est continue à droite en 1.

0.75 **2. a.** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $\left]1,+\infty\right[$, puis calculer la dérivé premier F' de la fonction F.

0.75 **b.** En utilisant **le théorème des accroissements finis deux fois** montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\left(\exists(\alpha;\beta)\in\left(\left]1,x\right[\right)^2\right)(\alpha>\beta);\ F(x)-F(1)=\frac{(1-x)(\alpha+2)}{2}\beta^2$$

0.50 **c.** Montrer que la fonction F est dérivable à droite en 1 et calculer $F'_d(1)$.

0.25 **3. a.** Montrer que : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\left(\exists c_x\in\left[x,x^2\right]\right);\ F(x)=\left(x-x^2\right)\dfrac{c_x-1}{\ln^2(c_x)}$.

0.50 **b.** En déduire que : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right);\ F(x)\le -x\left(\dfrac{h(x)}{2}\right)^2$.

0.75 **c.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0.25 **4. a.** Donner le tableau de variations de F.

0.25 **b.** Tracer la courbe (C_F). (On prend : $\|\vec{i}\|=1\ cm$).

Fin du sujet

bonne chance !

14/05/2021